PENYELESAIAN PERSAMAAN LOTKA-VOLTERRA DENGAN METODE TRANSFORMASI DIFERENSIAL

SUTRIANI HIDRI

Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Makassar
Email: nanni.cliq@gmail.com

Abstrak. Pada artikel ini dibahas persamaan Lotka-Volterra yang merupakan persamaan dari model yang membahas interaksi predasi antara mangsa dan pemangsa yang membentuk sistem persamaan diferensial biasa tak linear. Untuk melihat interaksi tersebut diperlukan penyelesaian dari persamaan Lotka-Volterra yang sulit untuk ditentukan secara analitik. Metode transformasi diferensial merupakan salah satu metode untuk menyelesaikan persamaan diferensial tak linear tanpa linearisasi terlebih dahulu. Penyelesaian dengan metode ini dilakukan dengan mentransformasi persamaan menggunakan sifat-sifat transformasi diferensial yang sesuai. Pada penyelesaian persamaan Lotka-Volterra terdapat 2 sistem persamaan. Masing-masing sistem disimulasikan dengan 3 kelompok nilai parameter yang berbeda. Solusi yang diperoleh berupa deret tak hingga, sehingga untuk keperluan praktis perlu dipotong sampai sejumlah N suku tertentu. Pada bagian akhir solusi tersebut divisualisasikan menggunakan *software* Maple 17.

Kata Kunci : *metode transformasi diferensial, model Lotka-Volterra, persamaan diferensial tak linear.*

I. PENDAHULUAN

Persamaan diferensial merupakan salah satu bagian dari matematika yang sangat erat hubungannya dengan kehidupan sehari-hari. Banyak masalah dalam bidang teknik, kesehatan dan ilmu pengetahuan alam yang dapat dimodelkan dalam bentuk persamaan diferensial. Berbagai aktifitas yang bergantung terhadap waktu dirumuskan dalam bentuk persamaan diferensial biasa baik linear atau pun tak linear. Salah satu contoh persamaan diferensial tak linear adalah persamaan yang terbentuk dari model mangsa pemangsa. Model mangsa pemangsa dikenal sebagai model Lotka-Volterra yang membahas interaksi antara 2 atau lebih spesies makhluk hidup. Dalam berinteraksi, tentunya diharapkan jumlah spesies mangsa dan pemangsa harus sesuai dengan proporsinya (ukuran) agar interaksi dapat seimbang sehingga diperlukan penyelesaian dari penyelesaian persamaan model Lotka-Volterra. Pada tahun 1986, Zhou memperkenalkan suatu metode yang dapat diterapkan dalam penyelesaian persamaan diferensial tak linear tanpa linearisasi terlebih dahulu (Rahayu, dkk., 2012). Metode tersebut adalah metode transformasi diferensial (MTD). Berbagai penelitian diketahui menggunakan metode ini. Diantaranya oleh Rahayu dkk. (2012) yang membahas penyelesaian untuk persamaan diferensial Riccati orde satu dan orde dua. Dewi (2013) menggunakan metode ini untuk menyelesaikan model epidemi SIRS.

Dari latar belakang tersebut maka penulis merumuskan beberapa permasalahan yaitu bagaimana menyelesaikan persamaan diferensial tak linear orde satu dan orde dua dengan metode transformasi diferensial, bagaimana menyelesaikan persamaan Lotka-Volterra dengan metode transformasi diferensial serta bagaimana simulasi numerik persamaan Lotka-Volterra menggunakan Maple 17.

Sejalan dengan rumusan masalah, tujuan dari penelitian ini adalah untuk mengetahui cara menyelesaikan persamaan diferensial tak linear orde satu dan orde dua dengan metode transformasi diferensial, mengetahui cara menyelesaikan persamaan Lotka-Volterra dengan metode transformasi diferensial serta mengetahui hasil simulasi numerik menggunakan Maple 17.

II. KAJIAN PUSTAKA

Metode Transformasi Diferensial

Definisi metode transformasi diferensial $U(k)$ dari fungsi $u(x)$ adalah sebagai berikut

$$U(k) = \frac{1}{k!}\left[\frac{d^k u(x)}{dx^k}\right]_{x=x_0}, k = 0,1,2,3,... \qquad (1)$$

Pada persamaan (1), $u(x)$ merupakan fungsi yang ditransformasikan dan $U(k)$ merupakan fungsi transformasi. Invers dari metode transformasi diferensial $U(k)$ didefinisikan sebagai berikut

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} U(k)(x - x_0)^k, \qquad (2)$$

Dari persamaan (1) dan (2), didapatkan

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\left[\frac{d^k u(x)}{dx^k}\right]_{x=x_0} (x - x_0)^k \qquad (3)$$

Persamaan (3) menyatakan bahwa pengertian dari metode transformasi diferensial berasal dari deret Taylor (Hasan dan Erturk, 2007).

Sifat Transformasi Diferensial

Misalkan $U(k) = \frac{1}{k!}\left[\frac{d^k u(x)}{dx^k}\right], F(k) = \frac{1}{k!}\left[\frac{d^k f(x)}{dx^k}\right]$ dan $G(k) = \frac{1}{k!}\left[\frac{d^k g(x)}{dx^k}\right]$ merupakan masing-masing fungsi transformasi dari $u(x), f(x)$ dan $g(x)$. Beberapa sifat metode transformasi diferensial adalah sebagai berikut.

Sifat 1. Penjumlahan dan Pengurangan

Jika $u(x) = f(x) \pm g(x)$, maka $U(k) = F(k) \pm G(k)$.

Sifat 2. Perkalian dengan Konstanta

Jika $u(x) = \lambda g(x)$, maka $U(k) = \lambda G(k)$., untuk λ= konstanta

Sifat 3. Turunan Pertama

Jika $u(x) = \frac{dg(x)}{dx}$, maka $U(k) = (k + 1)G(k + 1)$

Sifat 4. Turunan ke-m

Jika $u(x) = \frac{d^m g(x)}{dx^m}$, maka $U(k) = (k+1) \dots (k+m) G(k+m)$

Sifat 5. Perkalian

Jika $u(x) = f(x)g(x)$, maka $U(k) = \sum_{r=0}^{k} F(r)G(k-r)$

Sifat 6. Perkalian m fungsi

Jika $u(x) = f_1(x), f_2(x) \dots f_m(x)$, maka $U(k) = \sum_{k_{m-1}=0}^{k} \dots \sum_{k_1=0}^{k_2} F_1(k_1)F_2(k_2 - k_1) \dots F_m(k - k_{m-1})$

Sifat 7. Fungsi Variabel Bebas

Jika $u(x) = x^m$, maka $U(k) = \delta(k-m) = \begin{cases} 1, & k-m=0 \\ 0, & k-m \neq 0 \end{cases}$,

Sifat 8. Fungsi Konstanta

Jika $u(x) = s,\ s \in \mathbb{R}$, maka $U(k) = \delta(k) = \begin{cases} s, & k=0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases}$

III. METODE PENELITIAN

Penelitian ini merupakan penelitian kajian teori mengenai sistem persamaan diferensial yang bertujuan untuk mencari penyelesaian persamaan Lotka-Volterra menggunakan metode transformasi diferensial. Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah studi literatur. Studi literatur merupakan penelitian yang dilakukan dengan bantuan bermacam-macam material meliputi dokumen, buku-buku, majalah, jurnal, atau bahan tulis lainnya.

Sesuai dengan masalah yang diteliti, maka penelitian ini dilakukan di Perpustakaan Jurusan Matematika FMIPA UNM sebagai lokasi utama dalam pengumpulan literatur untuk penulisan, serta tempat-tempat lain yang dapat memberikan informasi tentang apa yang menjadi pembahasan dalam penelitian ini. Waktu penelitian dilaksanakan selama 4 bulan yakni September 2014 hingga bulan Desember 2014.

Adapun prosedur pemecahannya sebagai berikut: (1) Masing-masing persamaan pada sistem persamaan Lotka-Volterra ditransformasikan menggunakan sifat transformasi diferensial yang sesuai, (2) Nilai-nilai parameter disubtitusikan pada persamaan hasil transformasi persamaan Lotka-Volterra, (3) Nilai awal yang diberikan ditransformasi menggunakan definisi transformasi diferensial, (4) Dipilih k suatu bilangan bulat tak negatif, bilangan tersebut disubtitusikan pada persamaan hasil transformasi persamaan Lotka-Volterra, (5) Nilai-nilai yang diperoleh disubtitusikan pada invers dari metode transformasi diferensial yang menghasilkan penyelesaian dari masalah tersebut, (6) Untuk melihat secara grafik solusi atau penyelesaian dari persamaan Lotka-Volterra, selanjutnya dilakukan simulasi numerik menggunakan *software* Maple 17.

IV. HASIL PENELITIAN DAN PEMBAHASAN

1. Penyelesaian Persamaan Diferensial Tak Linear Orde Satu dan Dua

Penyelesaian Persamaan Diferensial Tak Linear Orde Satu

Diberikan persamaan diferensial tak linear orde satu:

$$\frac{dy(t)}{dt} = ay^2(t) + by(t) + c \tag{4}$$

dengan nilai awal $y(0) = d$

Penyelesaian:

Langkah 1

Persamaan ditransformasi menggunakan sifat transformasi diferensial yang sesuai sehingga diperoleh

$$Y(k+1) = \frac{1}{k+1}\left[\left(a\sum_{r=0}^{k} Y(r)Y(k-r)\right) + bY(k) + \delta(k)\right] \tag{5}$$

Langkah 2

Transformasi nilai awal menggunakan definisi transformasi diferensial sehingga diperoleh transformasi nilai awal yaitu $Y(0) = d$.

Langkah 3

Substitusi setiap nilai $k = 0,1,2,3, ...$ pada persamaan (5)

Jika diberikan $a = 1, b = 2, c = 3$ dan $d = 0$ sehingga persamaan (4) menjadi

$$\frac{dy(t)}{dt} = y^2(t) + 2y(t) + 3 \tag{6}$$

dengan nilai awal $y(0) = 0$

dengan cara yang sama maka diperoleh

$$Y(1) = 3, Y(2) = 3, Y(3) = 5, ...$$

Langkah 4

Nilai-nilai yang diperoleh disubtitusikan pada invers dari metode transformasi diferensial pada persamaan (2) sehingga diperoleh penyelesaian persamaan diferensial tak linear orde satu dari persamaan (4.3) adalah

$$y(t) = 3t + 3t^2 + 5t^3 + \cdots$$

Penyelesaian Persamaan Diferensial Tak Linear Orde Dua

Diberikan persamaan diferensial tak linear orde dua :

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = ax^2(t) + t^m \tag{7}$$

dengan nilai awal $x(0) = d$ dan $x'(0) = e$

akan diselesaikan dengan menggunakan metode transformasi diferensial.

Penyelesaian:

Langkah 1

Persamaan ditransformasi menggunakan sifat transformasi diferensial yang sesuai sehingga diperoleh

$$X(k+2)=\frac{1}{(k+1)(k+2)}\left[a\left(\sum_{r=0}^{k}X(r)X(k-r)\right)+\delta(k-m)\right] \qquad (8)$$

Langkah 2

Transformasi nilai awal menggunakan definisi transformasi diferensial sehingga transformasi nilai awalnya yaitu $X(0)=d$ dan $X(1)=e$

Langkah 3
Substitusi setiap nilai $k=0,1,2,3,\ldots$ pada persamaan (8)

Jika diberikan $a=2, m=1, d=1$ dan $e=0$ sehingga persamaan (7) menjadi

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2}=2x^2(t)+t \qquad (9)$$

dengan nilai awal $x(0)=1$ dan $x'(0)=0$
dengan cara yang sama maka diperoleh

$$X(2)=1, X(3)=\tfrac{1}{6}, X(4)=\tfrac{1}{3}, \ldots$$

Langkah 4
Nilai-nilai yang diperoleh disubtitusikan pada invers dari metode transformasi diferensial pada persamaan (2) sehingga diperoleh penyelesaian persamaan diferensial tak linear orde dua dari persamaan(9) adalah

$$x(t)=1+t^2+\frac{1}{6}t^3+\frac{1}{3}t^4+\cdots$$

2. Penyelesaian Persamaan Lotka-Volterra dengan Metode Tranformasi Diferensial.

Kasus 1 Persamaan Lotka-Volterra 1 Mangsa dan 1 Pemangsa

Pada kasus 1 ini persamaan yang akan diselesaikan adalah sistem persamaan yang terbentuk dari model Lotka-Volterra (L-V) yakni

$$\frac{dx}{dt}=x(a-\alpha y)$$
$$\frac{dy}{dt}=-y(b-\beta x) \qquad (10)$$

$\frac{dx}{dt}$ menunjukkan jumlah populasi mangsa (x) pada waktu t, $\frac{dy}{dt}$ menunjukkan jumlah populasi pemangsa (y) pada waktu t, a menunjukkan koefisien laju kelahiran mangsa, $-b$ adalah koefisien laju kematian pemangsa, sedangkan α dan β menunjukkan koefisien interaksi antara mangsa dan pemangsa.

Untuk menyelesaikan persamaan Lotka-Volterra tersebut, persamaan ditransformasikan dengan menggunakan sifat-sifat metode transformasi diferensial sehingga diperoleh sistem persamaan hasil transformasi

$$X(k+1) = \frac{1}{(k+1)}\left[aX(k) - \alpha\sum_{r=0}^{k} X(r)Y(k-r)\right]$$
$$Y(k+1) = \frac{1}{(k+1)}\left[-bY(k) + \beta\sum_{r=0}^{k} X(r)Y(k-r)\right] \qquad (11)$$

Nilai-nilai parameter yang digunakan pada persamaan Lotka-Volterra dapat dilihat pada Tabel 1.

Tabel 1. Nilai-nilai parameter persamaan L-V 1 mangsa dan 1 pemangsa

Parameter	Nilai (1)	Nilai (2)	Nilai (3)
a	0.2	0.2	0.1
α	0.005	0.005	0.001
b	0.5	0.1	0.5
β	0.01	0.001	0.01

Nilai parameter (1) berasal dari penelitian estimasi parameter Trisilowati dkk. (2011). Sementara nilai parameter (2) dan (3) ditambahkan untuk melihat perilaku sistem ketika parameternya berbeda.

Diberikan nilai awal $x(0) = 60$ dan $y(0) = 30$ yang ditransformasi menggunakan definisi transformasi diferensial menghasilkan $X(0) = 60$ dan $Y(0) = 30$. Dengan menggunakan nilai awal yang telah ditransformasikan dan $k = 0, 1, 2, 3, \dots, 10$, persamaan (11) menghasilkan nilai-nilai yang kemudian disubstitusi pada persamaan (2).

Untuk penyelesaian persamaan Lotka- Volterra dengan metode transformasi diferensial dari nilai parameter (1) diperoleh

$$x(t) = 60 + 3\,t - 0{,}3750{,}255\,t^2 - 0{,}08125\,t^3 - 0{,}00279\,t^4 + 0{,}00065\,t^5 + 0{,}0001\,t^6 + (7{,}395 \times 10^{-5})\,t^7 - (1{,}98 \times 10^{-7})\,t^9 - (1{,}978 \times 10^{-7})t^9 + (1{,}8333 \times 10^{-8})t^{10}$$

$$y(t) = 30 + 3\,t + 0{,}6\,t^2 + 0{,}01\,t^3 - 0{,}004\,t^4 - 0{,}0011\,t^5 - 0{,}0001096\;t^6 - 0{,}0001096\;t^6 + (5{,}533 \times 10^{-8})t^7 + (1{,}707 \times 10^{-5})t^8 + (2{,}7111 \times 10^{-7})t^9 + (1{,}5195 \times 10^{-8})t^{10}$$

Untuk penyelesaian persamaan Lotka- Volterra dengan metode transformasi diferensial dari nilai parameter (2) diperoleh

$$x(t) = 60 + 3\,t + 0{,}255\,t^2 + 0{,}00335\,t^3 + 0{,}000133375\,t^4 - (1{,}329 \times 10^{-5})\,t^5 - (4{,}4184 \times 10^{-7})\,t^6 - (2{,}6864 \times 10^{-8})\,t^7 - (5{,}814 \times 10^{-10})t^8 - (2{,}8899 \times 10^{-12})t^9 + (1{,}42274 \times 10^{-13})t^{10}$$

$$y(t) = 30 - 1{,}2\,t + 0{,}069\,t^2 + 0{,}00043\,t^3 - (3{,}925 \times 10^{-6})\,t^4 + (3{,}805 \times 10^{-6})\,t^5 - (6{,}368 \times 10^{-8})\,t^6 + (3{,}758 \times 10^{-9})\,t^7 - (6{,}501 \times 10^{-11})t^8 - (1{,}284 \times 10^{-12})t^9 - (2{,}718 \times 10^{-14})t^{10},$$

Untuk penyelesaian persamaan Lotka- Volterra dengan metode transformasi diferensial dari nilai parameter (3) diperoleh

$$x(t) = 60 + 4{,}2\,t + 0{,}057\,t^2 - 0{,}01847\,t^3 - 0{,}0022905\,t^4 - 0{,}0002\,t^5 - 0{,}000012\,t^6 - (3{,}517 \times 10^{-7})t^7 + (4{,}571 \times 10^{-8})t^8 + (9{,}9578 \times 10^{-9})t^9 + (1{,}1793 \times 10^{-9})t^{10}$$

$$y(t) = 30 + 3\,t + 0{,}78\,t^2 + 0{,}0737\,t^3 + 0{,}0091\,t^4 + 0{,}000641\,t^5 + 0{,}0000357\,t^6 - (7{,}857 \times 10^{-7})t^7 - (4{,}5198 \times 10^{-7})t^8 - (6{,}9388 \times 10^{-8})t^9 - (7{,}328 \times 10^{-9})t^{10}$$

Kasus 2 Persamaan Lotka-Volterra 2 Mangsa dan 1 Pemangsa

$$\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= a_1x_1 - \alpha_{12}x_1x_2 - \alpha_1x_1y \\
\frac{dx_2}{dt} &= a_2x_2 - \alpha_{21}x_2x_1 - \alpha_2x_2y \\
\frac{dy}{dt} &= -by + \beta_1x_1y + \beta_2x_2y
\end{aligned} \tag{12}$$

dimana a_1 dan a_2 berturut-turut menunjukkan laju kelahiran mangsa 1 dan mangsa 2, b menunjukkan laju kematian pemangsa. α_{12} dan α_{21} menunjukkan interaksi antara mangsa 1 dengan mangsa 2. β_1 dan β_2 berturut-turut menunjukkan interaksi antara pemangsa dengan mangsa 1 dan mangsa 2.

Untuk menyelesaikan persamaan (2) dengan metode transformasi diferensial, persamaan tersebut ditransformasikan menggunakan sifat transformasi diferensial yang sesuai sehingga diperoleh hasil transformasi sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
X_1(k+1) &= \frac{1}{(k+1)}\left[a_1X_1(k) - \alpha_{12}\left(\sum_{r=0}^{k} X_1(r)\,X_2(k-r)\right) - \alpha_1\sum_{r=0}^{k} X_1(r)Y(k-r)\right] \\
X_2(k+1) &= \frac{1}{(k+1)}\left[a_2X_2(k) - \alpha_{21}\left(\sum_{r=0}^{k} X_2(r)\,X_1(k-r)\right) - \alpha_2\sum_{r=0}^{k} X_2(r)Y(k-r)\right] \\
Y(k+1) &= \frac{1}{(k+1)}\left[-bY(k) + \beta_1\left(\sum_{r=0}^{k} X_1(r)\,Y(k-r)\right) + \beta_2\sum_{r=0}^{k} X_2(r)Y(k-r)\right]
\end{aligned} \tag{13}$$

Nilai-nilai parameter yang digunakan pada persamaan Lotka-Volterra kasus 2 dapat dilihat pada Tabel 2.

Tabel 2. Nilai-nilai parameter persamaan L-V 2 mangsa dan 1 pemangsa

Parameter	Nilai (1)	Nilai (2)	Nilai (3)
a_1	0.2	0.2	0.1
α_{12}	0.00017	0.00017	0.0002
α_1	0.0017	0.0017	0.002
a_2	0.1	0.2	0.1
α_{21}	0.00025	0.00017	0.0005
α_2	0.0017	0.0017	0.005
b	0.01	0.01	0.1
β_1	0.00085	0.00085	0.00085
β_2	0.00008	0.00008	0.00085

Nilai parameter (1) berasal dari penelitian Rohmah dan Erna (2013). Sementara nilai parameter (2) dan (3) ditambahkan untuk melihat perilaku sistem ketika parameternya berbeda.

Untuk kasus ini diberikan nilai awal $x_1(0) = 50$, $x_2(0) = 40$ dan $y(0) = 20$. Yang ditransformasi sehingga diperoleh $X_1(0) = 50$, $X_2 = 40$ dan $Y(0) = 20$. Dengan menggunakan nilai awal yang telah ditransformasikan dan $k = 0, 1, 2, 3, \dots, 10$, persamaan (11) menghasilkan nilai-nilai yang kemudian disubstitusi pada persamaan (2).

Untuk penyelesaian persamaan Lotka- Volterra dengan metode transformasi diferensial dari nilai parameter (1) diperoleh

$$x_1(t) = 50 + 7{,}96\,t + 0{,}59417\,t^2 + 0{,}02504\,t^3 + 0{,}0003726\,t^4 - 0{,}000033\,t^5 - 0{,}00000356\,t^6 - (2{,}228 \times 10^{-7})\,t^7 - (1{,}121 \times 10^{-8})\,t^8 - (4{,}829 \times 10^{-10})\,t^9 - (1{,}712 \times 10^{-11})\,t^{10}$$

$$x_2(t) = 40 + 2{,}14\,t - 0.006831\,t^2 - 0{,}00625\,t^3 - 0{,}000397\,t^4 - 0{,}0000129\,t^5 - (6{,}554 \times 10^{-8})\,t^6 + (1{,}978 \times 10^{-8})\,t^7 + (1{,}401 \times 10^{-9})\,t^8 + (5{,}822 \times 10^{-11})\,t^9 + (1{,}639 \times 10^{-12})\,t^{10}$$

$$y(t) = 20 + 0{,}714\,t + 0{,}08212\,t^2 + 0{,}00599\,t^3 + 0{,}0003899\,t^4 + 0{,}0000235\,t^5 + 0{,}000001316\,t^6 + (6{,}7599 \times 10^{-8})\,t^7 + (3{,}112 \times 10^{-9})\,t^8 + (1{,}2199 \times 10^{-10})\,t^9 + (3{,}435 \times 10^{-12})\,t^{10}$$

Untuk penyelesaian persamaan Lotka- Volterra dengan metode transformasi diferensial dari nilai parameter (2) diperoleh

$$x_1(t) = 50 + 7{,}96\,t + 0{,}576\,t^2 + 0{,}02085\,t^3 - 0{,}000103\,t^4 - 0{,}00006558\,t^5 - 0{,}00000482\,t^6 - (2{,}2201 \times 10^{-7})\,t^7 - (6{,}630 \times 10^{-9})\,t^8 - (7{,}614 \times 10^{-11})\,t^9 + (6{,}092 \times 10^{-12})\,t^{10}$$

$$x_2(t) = 40 + 6{,}3\,t + 0.445\,t^2 + 0{,}015\,t^3 - 0{,}00023\,t^4 + 0{,}00006\,t^5 - 0{,}000003996\,t^6 - (1{,}645 \times 10^{-7})\,t^7 - (3{,}817 \times 10^{-9})\,t^8 - (3{,}817 \times 10^{-9})\,t^8 + (3{,}692 \times 10^{-11})\,t^9 + (9{,}317 \times 10^{-12})\,t^{10}$$

$$y(t) = 20 + 0{,}714\,t + 0{,}085\,t^2 + 0{,}00625\,t^3 + 0{,}000399\,t^4 + 0{,}0000232\,t^5 + 0{,}000001224\,t^6 + (5{,}711 \times 10^{-8})\,t^7 +$$

$$(2{,}211 \times 10^{-9})\ t^8 + (5{,}734 \times 10^{-11})\ t^9 - (5{,}565 \times 10^{-13})\ t^{10}$$

Untuk penyelesaian persamaan Lotka- Volterra dengan metode transformasi diferensial dari nilai parameter (3) diperoleh

$$x_1(t) = 50 + 2{,}6\,t + 0{,}096\,t^2 + 0{,}0019\ \ t^3 + 0{,}00002\ \ t^4 - (1{,}812 \times 10^{-7})\ t^5 - (2{,}099 \times 10^{-8})\ t^6 - (6{,}3269 \times 10^{-10})\ t^7 - (2{,}066 \times 10^{-11})\ t^8 - (5{,}0476 \times 10^{-13})\ t^9 - (1{,}0053 \times 10^{-14})\ t^{10}$$

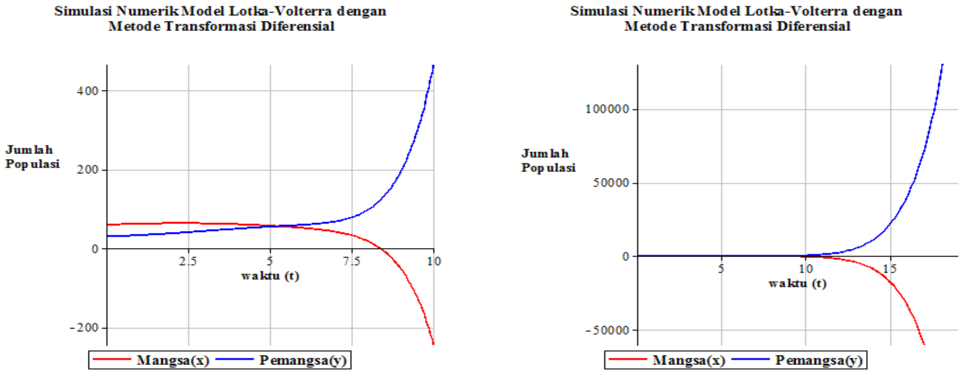
$$x_2(t) = 40 -\ t + 0{,}034\,t^2 - 0{,}00255\,t^3 - 0{,}0000325\ \ t^4 - (7{,}237 \times 10^{-7})\ t^5 + (1{,}991 \times 10^{-8})\ t^6 + (1{,}212 \times 10^{-9})\ t^7 - (3{,}842 \times 10^{-11})\ t^8 + (1{,}429 \times 10^{-12})\ t^9 - (4{,}608 \times 10^{-14})\ t^{10}$$

$$y(t) = 20 - 0{,}47\,t + 0{,}019\ \ t^2 + 0{,}000372\ \ t^3 - 0{,}000011\,t^4 + (8{,}054 \times 10^{-7})\ t^5 - (6{,}6998 \times 10^{-9})\ \ t^6 + (1{,}4255 \times 10^{-10})\ t^7 + (1{,}1823 \times 10^{-11})\ t^8 - (3{,}673 \times 10^{-13})\ t^9 + (1{,}371 \times 10^{-14})\ t^{10}$$

3. Simulasi Numerik dengan Maple 17

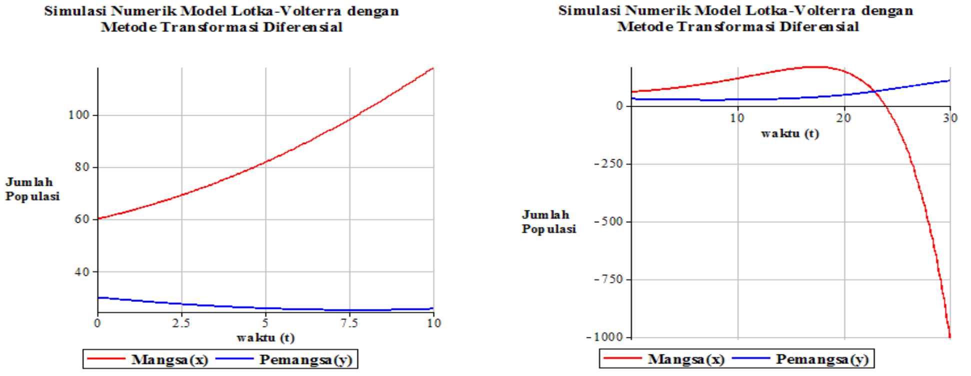
Simulasi numerik berikut dilakukan dengan nilai awal dan parameter yang sama pada bagian sebelumnya. Simulasi ini dibagi menjadi 3 bagian berdasarkan nilai parameter yang digunakan.

Simulasi dengan nilai parameter (1), $a = 0{,}2; \alpha = 0{,}005; b = 0{,}5; \beta = 0{,}01$



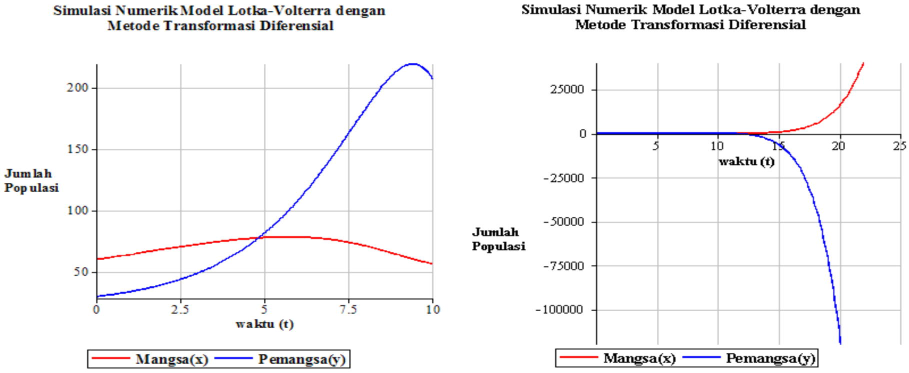
Gambar 1. Simulasi numerik parameter (1) untuk $t = 10$ dan $t = 30$

Simulasi dengan nilai parameter (2), $a = 0{,}2; \alpha = 0{,}005; b = 0{,}1; \beta = 0{,}001$



Gambar 2. Simulasi numerik parameter (2) untuk $t = 10$ dan $t = 30$

Simulasi dengan nilai parameter (3), $a = 0{,}1; \alpha = 0{,}001; b = 0{,}5; \beta = 0{,}01$

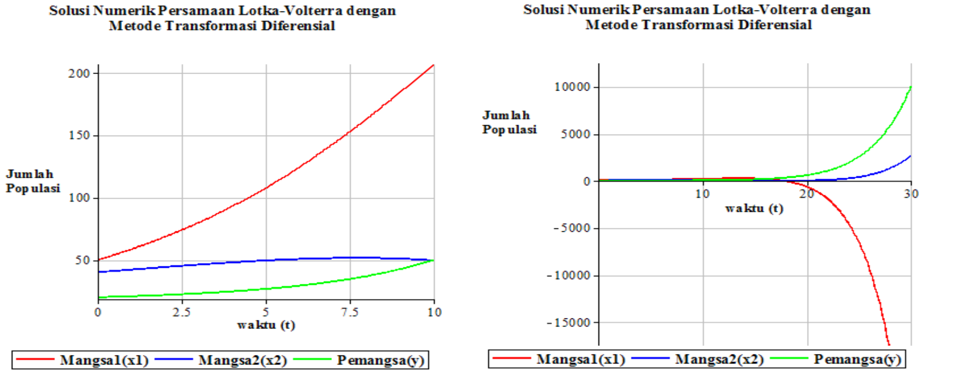


Gambar 3. Simulasi numerik parameter (3) untuk $t = 10$ dan $t = 30$

Kasus 2 Persamaan Lotka-Volterra 2 Mangsa dan 1 Pemangsa

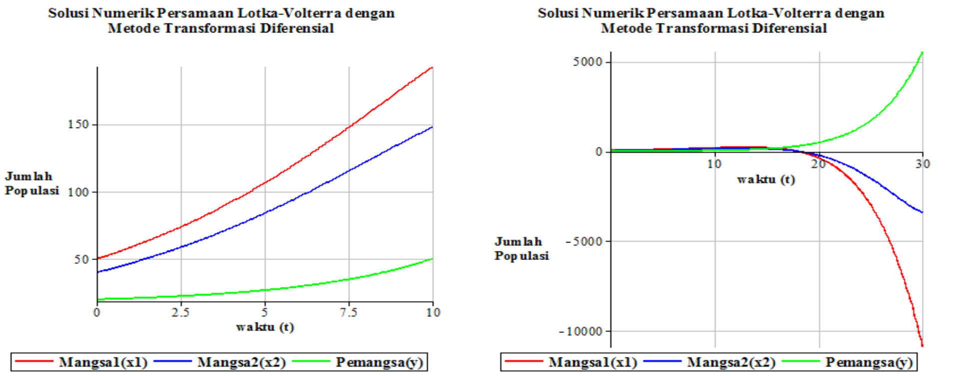
Simulasi numerik berikut dilakukan dengan nilai awal dan parameter yang sama pada bagian sebelumnya.

Simulasi dengan nilai parameter (1), $a_1 = 0{,}2; \alpha_{12} = 0.00017; \alpha_1 = 0.0017;$ $a_2 = 0{,}1; \alpha_{21} = 0.00025; \alpha_2 = 0.0017; b = 0{,}01; \beta_1 = 0.00085; \beta_2 = 0.00008;$



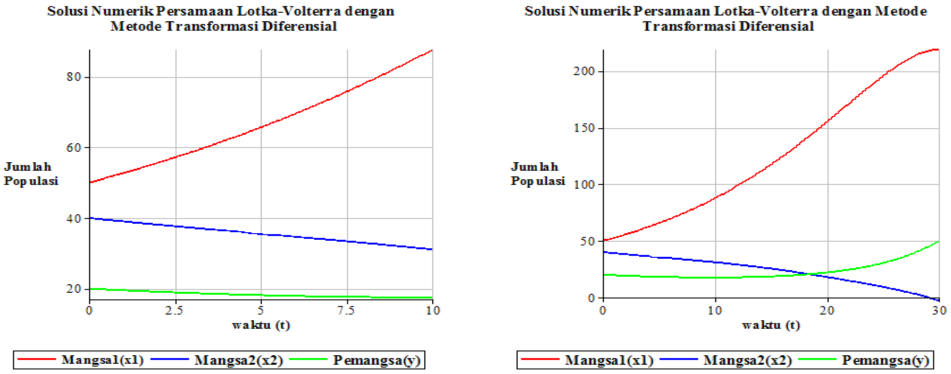
Gambar 4. Simulasi numerik parameter (1) untuk $t = 10$ dan $t = 30$

Simulasi dengan nilai parameter (2), $a_1 = 0{,}2; \alpha_{12} = 0.00017; \alpha_1 = 0.0017;$ $a_2 = 0{,}2; \alpha_{21} = 0.00017; \alpha_2 = 0.0017; b = 0{,}01; \beta_1 = 0.00085; \beta_2 = 0.00008;$



Gambar 5. Simulasi numerik parameter (2) untuk $t = 10$ dan $t = 30$

Simulasi dengan nilai parameter (3), $\alpha_1 = 0{,}1; \alpha_{12} = 0.0002; \alpha_1 = 0.002; \alpha_2 = 0{,}1; \alpha_{21} = 0.0005; \alpha_2 = 0.005; b = 0{,}01; \beta_1 = 0.00085; \beta_2 = 0.00085;$



Gambar 6. Simulasi numerik parameter (2) untuk $t = 10$ dan $t = 30$

Simulasi dengan menggunakan program Maple 17 yang dilakukan untuk 2 kasus dengan nilai parameter dan nilai awal tersebut memberikan informasi bahwa kedua spesies saling mempengaruhi secara signifikan. Berdasarkan gambar yang dihasilkan, penentuan nilai parameter dan nilai awal sangat sensitif. Pemberian nilai awal dan nilai parameter yang berbeda akan memberikan gambar yang lebih variatif pula. Penurunan jumlah populasi baik mangsa maupun pemangsa pada angka negatif menunjukkan habisnya populasi tersebut. Meskipun demikian simulasi tetap dilanjutkan untuk melihat perilaku sistem pada waktu berikutnya.

Oleh karena itu penyelesaian yang diperoleh sudah sudah dapat menjelaskan prilaku sistem dalam konsep ekologi. Akan tetapi, perubahan jumlah populasi yang dihasilkan terlalu besar sehingga metode transformasi diferensial kemungkinan kurang cocok untuk menjelaskan jumlah populasi yang ada pada saat t tertentu sehingga dari penelitian ini diketahui bahwa metode transformasi diferensial hanya cocok untuk menjelaskan perilaku sistem Lotka-Volterra.

V. KESIMPULAN

Untuk menyelesaikan sebuah persamaan diferensial biasa tak linear orde satu dan/atau orde dua dengan metode transformasi diferensial diperlukan 4 tahap yang dimulai dengan mentransformasi persamaan dan nilai awal, subtitusi nilai awal dan k, serta mensubtitusi nilai-nilai yang diperoleh pada invers metode transformasi diferensial. Hal yang sama berlaku pada penyelesaian persamaan Lotka-Volterra dengan nilai parameter yang telah ditentukan. Pada simulasi numerik dengan Maple 17 diperoleh bahwa metode transformasi diferensial lebih cocok untuk menjelaskan perilaku sistem Lotka-Volterra dibanding menentukan jumlah populasi saat t disebabkan oleh sensitifitas pengambilan parameter dan nilai awal.

VI. UCAPAN TERIMA KASIH

Penulis mengucapkan terima kasih yang sebanyak-banyaknya kepada Bapak Syafruddin Side dan Bapak Ja’faruddin selaku pembimbing atas segala motivasi dan bimbingan yang diberikan. Kepada Bapak Muhammad Abdy, Bapak Ahmad

Zaki dan Ibu Wahidah Sanusi selaku penguji atas segala saran dan kritik yang diberikan pada penelitian ini.

DAFTAR PUSTAKA

Dewi, D. M. 2013. *Penyelesaian Model Epidemi SIRS dengan Metode Transformasi Diferensial*. Skripsi S1 pada Jurusan Matematika FMIPA Universitas Brawijaya: tidak diterbitkan.

Hasan, I.H.A.H & Erturk, V.S. 2007. *Applying Differential Transformation Method to the On-Dimensional Planar Bratu Problem*. Int.J.Contemp.Math.Science. 30(2), 1493-1504.

Rahayu, Sugiatno & Bayu Prihandono. 2012. *Penyelesaian Persamaan Diferensial Biasa Tak Linear dengan Metode Transformasi Diferensial*. Jurnal Bimaster, vol 01(1),hal 9-14.

Rohmah, Nabila A. & Erna Apriliani. 2013. *Pengendalian Hama pada Model Mangsa-Pemangsa dengan Musuh Alaminya*. Jurnal Sains dan Seni POMITS, vol 01(1).

Trisilowati, Dhevi Yuli & Ricky Aditya. 2011. *Estimasi Parameter pada Model Interaksi Dua Populasi*. Diakses melalui http://dewapurnama.files.wordpress.com/2012/08/modul-dewa89s-penelitian-trisilowati-2.pdf. [17 Desember 2014].